

COURS DE MATHÉMATIQUES – SÉRIES NUMÉRIQUES (PARTIE 1)

Proposer par Pr. Yahya ABEIDI

1. Différence entre U_n , S_n et $\sum U_n$

- U_n : C'est le **terme général** de la suite.
- S_n : C'est la somme partielle d'ordre n , définie par :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \sum_{k=0}^n U_k$$

- $\sum U_n$: C'est la **série numérique** elle-même (la somme infinie de tous les termes).

2. Convergence d'une série

Une série $\sum U_n$ **converge** si et seulement si la suite de ses sommes partielles (S_n) admet une limite finie ℓ lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ell \in \mathbb{R}$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \pm\infty$, la série est **divergente**.

Exemple type :

Étudions la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ (série géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$). La somme partielle est :

$$S_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

En passant à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \in \mathbb{R}$$

Conclusion : La série converge et sa somme vaut 2.

3. Calcul des sommes partielles S_n

En pratique, on ne peut calculer explicitement la somme partielle S_n que dans trois cas particuliers :

1. Les **suites géométriques**
2. Les **suites arithmétiques**
3. Les **séries télescopiques**

4. Condition nécessaire de convergence (Non suffisante)

Si la série $\sum U_n$ **converge**, alors nécessairement son terme général tend vers 0 :

$$\sum U_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

Attention : La réciproque est fausse (une condition nécessaire n'est pas suffisante).
En revanche, par contraposée : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \neq 0$, alors la série est **divergente**.

Exemple d'application :

Étudions la série $\sum U_n$ avec $U_n = 1 + \frac{1}{n^2}$. Calculons la limite du terme général :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = 1 + 0 = 1 \neq 0$$

Conclusion : Comme $\lim U_n \neq 0$, la série **diverge grossièrement**.

5. Séries de référence

A. Séries géométriques

Une série géométrique est de la forme $\sum q^n$.

— Si $|q| < 1$: La série est **convergente**.

— Si $|q| \geq 1$: La série est **divergente**.

Exemples :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$: Ici $|q| = \frac{1}{3} < 1$, donc la série **converge**.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} (2)^n$: Ici $|q| = 2 \geq 1$, donc la série **diverge**.

B. Séries de Riemann

Une série de Riemann est de la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$).

— Si $\alpha > 1$: La série **converge**.

— Si $\alpha \leq 1$: La série **diverge**.

Exemples :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$: Ici $\alpha = 2 > 1$, donc la série **converge** (série harmonique de Riemann avec $\alpha = 2$).
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$: Ici $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$, donc la série **diverge**.